日米数学教育比較

杉　山　真　澄

日米の数学の考え方の違いと教育観の違いを明らかにし、最近のテクノロジーの数学への導入の実態を比較する。

1．数学とは

1．1　位置付け

数学は言語の違いを越えた人類共通の文化遺産である。

数学的な活動とはBishop教授（(英、現在オーストラリア)：Mathematical Enculturation）によると

1．数えること
2．位置をしめすこと
3．測ること
4．デザインすること
5．遊ぶこと
6．説明すること

このなかの特に5の遊ぶということは、学校教育でとりあげられる機会は少なかったが、決まりを守らなければ戦に勝てないということを学ぶには格好の教材である。

いつの時代でも数学は、ビジネスや物理的科学における諸問題の解決にあたっての重要な道具であった。当面の問題の厳密な定式化と可能な状況の計算、決定すべき事項を明らかにして数量化することで解決の手がかりを得ることができる。

19世紀までは2～4個の程度の変量しか含まないようような単純な問題、ビジネス、調査、航海、物理学の研究に関連したものばかりであったが、20世紀になってからは2～4個の程度の変量ではなく20億もの変量を含み、関連づかない複雑な問題を解析するため、有力な確率論と統計力学で取り組んだ。しかし、生物学、医学、心理学、政治経済学などにおいては2～4個の程度の変量しか含まないが19世紀的手法や統計確率論的手法では手に負えない関連づいた複雑な問題の解決が求められている。

1．2　役割

数学的概念そのものを理解して、計算・評価・概算・測定など日常の生活場面に数学を応用するだけではなく、その中心にある理解事項と理解の手続き、問題解決、創造的思考といわれる考えや過程をも含んでいて、実験室アプローチ（Car Leinbach：Laboratory Approach）でいわれている手順役割は次の５つの行動

観察すること　Observation

確定すること　Identification

探究すること　Exploration

分析すること　Analysis

説明すること　Explanation

の成就である。

1．3　数学指導者の役割と指導方法

容易なものから難しいものへ段階づけられたカリキュラムの序列に沿って進めていけばよい。しかし、技術的になりすぎると技術の習得で専ら「何を」ではなく「いかに」が問われ、カリキュラムをできるだけ「速く」「多く」こなしていくように圧力がかかることになる。ただ単にどのように教材を提示するかだけになってしまい、情報知識の伝達だけで本来の教え育てることからはなれてしまう。学業時間についての規制はあるが、それよりも内容であるが、どのように教えるかは問われていない。

数学のように外見が理屈に終止し、機械的とも思われる記号的演算によって蔽われているだけのように見える学問では、指導者の役割は大きく、数学に対する情熱とともにその豊かな感性が生徒たちの中に眠っている数学的感性を目覚めさせ、この感性を働かせることを喜びとし、そしてとくに才能に恵まれた生徒に対してはしばしば研究の途へと駆り立てさせもするのである。

2．日米の数学

2．1　日米を比較する理由

アメリカやイギリスは数学教育の先進国で、その数学教育の動向には世界各国が注目している。アメリカでは、しかし100年前はドイツ・イギリス・フランスなどのヨーロッパ諸国に遅れをとり、追い付くことが課題であった。その後独自の改革をすすめ数学教育の先進国となってきている。

一方、日本はその経済力の高さから、教育効果の結果と思われているが、それは学校教育ではなく塾産業ゆえに学力が高いと思われている。

そこで、どのような点が日米で問題か、分析比較して浮かびあげていく。

2．2　日米の数学教育事情

2．2．1　日本

数学の目標

『高等学校学習指導要領』によると、「数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高めるとともに数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる」ことである。

学習指導要領も年代とともに変化していて、数学のよさの変遷をみてみると、数学世界内の活動だけではなく、実世界と数学世界の交流でおこる活動も必要で、この2つのバランスをどのようにとるかが問題となっている。前者に傾き過ぎると子どもは数学と社会や自分の関係を意識できず、一方、後者に傾きすぎると数学とは何かという本質を見失ってしまうことになる。現実とのかかわりから数学的なものを工夫して抽出し、これを仕上げていくという観点からカリキュラムにいれたのが1951年の学習指導要領で、その中で次の点を目指している。

1．物事を正確にしていく
2．わかりやすく、はっきりと人に伝える
3．労力を節約し、能率よくする
4．筋道をたてて人にもわからせる

1952年、58年の中学校学習指導要領において日常生活とのかかわりから数学のよさを強調していたが、69年、77年においては見られなくなり、89年において再び「……数学の見方や考え方のよさを知り、……」という形で数学のよさが強調されている。

一方、国際数学教育調査から子どもたちは数学をあまり好きではなく、社会と数学とはかけ離れていると考えているし、国立教育研究所基礎学力調査からは数学の学習が問題を解く事が中心だと感じているうえに、問題を解いたらそれで終わりとしてさらに発展させていこうという意識がないことが明らかになっている。

教育事情

学校教育では、数学の目標を目指して段階的に次のような能力開発がすすめられる：

1．覚えること
2．練習
3．作ること
4．鑑賞
5．発表、討論、検討

3～5はActivity応答能力つまりなぜそう考えたのか、そうしたのか、の説明であるが、現状では2の練習の段階で止まる場合が多い。

精密でたゆみない観測･記録（異常な精密さと誠実さ）、伝承された記録が近代科学を推進させた。これは経験による発見である。体験から抽象化することがでてくるのだが、体験の乏しさから、突然の抽象で何がなんだか解らなくなっている。

学校数学はカリキュラム上、学年、校種によって教育内容が限定、分断され、数学が味気ないものになっている。

面倒な計算をするのは試験のため、現実の問題を解くためとは考えないうえ、学習能力が衰えているのはなぜか。

それは出世願望がなくなり､本当に楽しい勉強ならするけれど､つまらない勉強はしないという人が増えたためと言われる。学校教育の前に掲げた数学の目標の２番目にとどまっている。自分の出せる部分での参加がないことが大きい。実際、関数を使って好きな模様を描くという課題に対して全員が今までの知識を総動員し、なお不足のところは新たに学習して作品を完成させている実践教育例がある。

数学観

保護者と教師の意識の共通点は、

〇数学は日常生活に必要である。

〇数学はすべての人間にとって必要である。

〇数学は社会で大いに活用されている。

〇数学は論理的思考力を高める。

保護者と教師の意識の差が強く表れているのは次の３点である。

＊数学は美しい（保護者47％：教師69％）

＊数学は誰でも楽しさを味わえる（45％：71％）

＊数学は記号のゲームである（52％：29％）

教材

教材の位置付け、たとえばどうして数列を学ぶのかという問題意識がない。
解くことが問題なのか、問題のための問題、や「……であることを証明せよ」という形式の問題が多い。この形の問いは当然解りきったことの確認にすぎず、何の驚きも発展もない。解決していくことが大切である。例えば現実の問題を解決するためであれば、数字はすべてが整数であるわけはなく、小数の場合もあるであろう。計算が面倒になるというのであれば、積極的に電卓で計算すればよい。

与えられた問題をいかに効率良く（速く）解くかを数学の授業で行なうだけならば、数学に歴史や発展があるなどとは想像できないことになる。

数学の流れ＝進歩・発展する数学で、いまだに完成していない発展途中なのが現実の数学である。流れの中の位置を知ることは、客観的な評価とあいまって有意義である。

また、失敗から学ぶことが多いのに、失敗しないようにレールをしいて効率よく勉強するのが本当に教育になるのだろうか。どのようなときに数学の面白さを感じたのか、単に楽しい数学ではなく知的刺激に富む楽しさである。どこがわかりにくいか、理解できないときの精神的苦痛とその克服の体験、苦労して理解できたときの喜びと自信などについても積極的に情報を流す必要がある。

発想の不思議さ、なぜそのようなことが頭に浮かぶのか、「おや？」と思ったり、「何故そうなるの？」と理由を考えようとしている時に急がさないようにすることが望ましい。

社会的文脈 (social context　実世界の問題、実際の問題) を重視した問題や教材の必要性があり、しかし実際的な問題だけではその中心にある概念や技能が隠されてしまう危険性がある。

指導方法

基本的アイデアとその拡張に関する理解を伸ばすには、指導技術が大切である。

数学的概念そのものではなく、その中にある理解事項や理解の手続きのマニュアル化は可能である。

1．法則を考えさせる
2．理解させる
3．法則を見出させる
4．法則に慣れさせる

しかし、それでは教えこむことが中心で、生徒の理解に欠けがちである。

教育観

数学を学ぶ楽しさを経験させることが重要である。小中高校では「わかって欲しい」と考える割合が増えるのに対し、「楽しむ」のは減る傾向にある。だんだん難しくなるに従い、楽しむのは無理にしてもせめてわかってほしいという切実な願いのようである。

保護者

(%)

	小	中	高
わかる	37.8	45.4	50.4
楽しむ	42.2	32.9	29.0
できる	12.0	15.2	14.4

保護者は日常生活や社会における数学の有用性を意識 (96%) し、計算力の習熟 (95%)、実際の問題が解ける (93%)、これらを感得させる教育が必要と考えている。

入学試験に通じる問題解決能力を身に付けさせる（保護者64.5%：教師56.2%）

日本高等学校の実体

(1) センター試験受験者数に見る分布、他学科との比較

表－1　年度別教科選択率

(%)

			社会					数学		理科				
	国語	英語	倫理	日本	世界	地理	現代社会	数Ⅰ	数Ⅱ	物理	地学	化学	理科	生物
1993	91.5	96.1	6.3	35.0	25.3	19.1	1.3	76.4	70.7	29.1	5.1	36.3	1.0	25.9
1994	90.5	95.0	5.9	35.0	24.8	18.6	1.5	75.1	68.4	28.2	5.5	35.1	1.2	26.1
1995	91.3	96.8	5.7	36.0	23.6	19.3	1.3	75.5	69.5	28.5	5.3	34.8	1.1	27.3
1996	90.5	95.9	5.4	34.6	22.0	21.3	1.3	73.9	68.3	28.5	4.4	33.4	0.9	27.8

大学入試の一次試験も兼ねている場合が多く、その大学・学科などで要求される科目を受験するので、必要とされる科目の分布と見ることができる。

(2) 東京

全日制高等学校普通科指導内容と履修割合を国公立と私立を文科系と理科系に分けた表である。

表－2　指導内容と履修割合

（東京都高等学校数学教育研究会「次期学習指導要領に対する提言」平成9年9月より）

(%)

		国公立理系	私立理系	国公立文系	私立文系	合計
	中学の復習	10	8	10	5	8
数学Ⅰ	二次関数	100	100	100	100	100
	図形と計量	100	98	100	98	99
	関数の処理	100	100	100	98	100
	確率	99	98	97	97	98
数学A	数と式	100	98	97	88	96
	平面幾何	24	33	19	19	24
	数列	97	100	83	83	91
	計算とコンピュータ	13	7	8	7	9
数学Ⅱ	いろいろな関数	100	98	88	93	95
	図形と方程式	100	98	93	98	97
	関数の式の変化	100	98	92	95	96
数学B	ベクトル	94	98	92	95	96
	複素数と複素数平面	96	98	38	42	68
	確率分布	39	27	13	19	24
	算法とコンピュータ	3	7	0	5	3
数学Ⅲ	関数と極限	100	98	3	8	52
	微分法	100	98	3	8	52
	積分法	100	93	3	8	51
数学C	行列と線形計算	79	92	6	7	46
	いろいろな曲線	79	88	8	5	45
	数値計算	21	12	4	2	10
	統計処理	15	15	4	8	11

東京の高等学校実体分析

複素数、ベクトル、数学III(関数と極限、微分、積分)、行列、曲線は理系のほぼ全てが選択しているのに対して文系ではベクトル以外は半分より少なくしか選択されていない。

確率・統計処理の分野の選択も数学Iの確率以降の内容についての履修は確率分布は理系33.3%、文系15.3%、統計処理は理系15%、文系6%と少ない。

コンピュータ関係では数学Aの計算とコンピュータが9%、数学Bの算法とコンピュータは3%である。テクノロジー関連の履修が社会の風潮に比して極端に少ないのが目立つ。

(3) 大阪

表－3 大阪における数学Cの科目開講状況
(平成8年普通科を有する全学校約250校対象回答147校)

数学C	全 体	国 立	府 立	市 立	私 立
開講	110	1	72	3	34
開講せず	37	0	18	1	18
計	147	1	90	4	52

大阪府下の国公立高校で数学Cの履修年次及び必修・選択の別でみると、

表－4 数学C

	3 年	内私学	2 年	内私学
全員必修	12	3	18	1
全員選択	7	2	2	1
理系必修	69	25	3	2
理系選択	21	1	1	1
文系必修	3	0	0	0
文系選択	8	0	0	0

理系90校で必修・選択しているのは大学受験に必要だからであろう。

しかし、数学A、Bにコンピュータの項目があるのでその中から2項目選択すればよいので、数学Cでコンピュータ関係の項目をとらなくてもよいという事情から数値計算、統計処理はほとんど開講されていない。ここでもテクノロジー関連が少ない. 次の表—5を見ても「講義のみ」ないしは「やらない」のが多くコンピュータ利用が少ない。

表－5

	コンピュータ利用	講義のみ	やらない
行列	10	106	5
いろいろな曲線	22	87	10
数値計算	3	8	95
統計処理	0	11	95

2．2．2　米国

数学の目標

幾何・代数の概念を理解する。初歩的な確率・統計を理解する。日常の生活場面に数学を応用する。計算の正確さを評価・概算・測定する。

「数と演算、関係と関数、証明、測定と近似、確率、統計、数学における言語と記号」という基本アイデアの理解を伸ばすには指導技術が大切で、教室での指導方法とその心理学的基礎を明らかにし例をあげている。

米数学教育改革運動

数学と社会とこどもという３つの変化・発展し続けるものに対応するため、1950年代の数学教育の現代化運動（他国の影響ではなく、直接の動機は、高等数学を学習する生徒が少ないことによる)、70年代の基礎技能(1971年第１回国際数学教育調査で成績が低かったことによる)、80年代のアジェンダで強調された問題解決、とハイスクールの教育内容の質をすべての生徒を対象に均等に引き上げようとする能力主義的な基調に立ち、しかも機会均等も実現する方向で始まり大学の一般教養や学部課程教育の改革を引き起こした。そして1983年の米国の科学や数学の学力が低いことを指摘した米政府報告書『危機に立つ国家』以来今日までの質を高め学力向上を目指すことに力を注いできた。

1983年からの改革の特徴は、改革の機運が学校の内部や数学者からというよりも政府主導ということと、アメリカの伝統である各州独自の教育に対して初めて全国基準『算数・数学カリキュラムと評価のスタンダード』が設定されたことである。

『スタンダード』の必要性は、市民･労働者として数学的素養の必要、すべての生徒のための数学（女性と小数民族の公平の問題からくる「すべて」のひと)、転職社会で生きていくための問題解決技能をつけるためである。

『スタンダード』の背景には生徒の学力向上だけでなくそれを支える教師の質の向上を目している。アメリカでは教師の給料（夏休みは無給）や地位が低く、専門的知識を持つ教師が常に不足している(数学を高校であまり学習しなくても高校の数学教師になっている)などの背景がある。

1991年政府報告書「2000年のアメリカ」で学校や大学のカリキュラムや指導方法は時代遅れ、と主張された。

州は教師の資格の基準を引き上げ、教員養成（小学校教師の資格）では、大学で数学を６単位とることが必要であり、中等学校数学教師の資格をとるために、22州で大学で数学を主専攻とすることを要求している。その結果専門職としての教師の質が向上した。

1997年12月22日の News Week 誌によると、カリフォルニア州の教育委員会は数学教育の「計算力・基礎力を重視する」改革案を保護者の強い要望運動により承認している。

米数学教育観

政治や社会の決定がますます複雑な科学技術の問題に関わっている。それらをよく考えて解決するためには科学技術の知識や理解が必要である。

その中で個人は生涯を通じて、適応することが必要となる。つまり、世界を探究したり、変化する状況に対応したり、新しい知識を積極的に求め生み出し続けることが必要である。この柔軟性が必要であることから、数学教育は数学の問題解決への応用に中心においたダイナミックな読み書き（リテラシー）を強調しなければならない。(*Curriculum and Evaluation Standard for School Mathematics Executive Summary* p.4)

教材

数学は確固とした構造を持っているので教えやすく、テストもしやすい。情報知識の能率の良い伝達が考えられており、受験参考書のようにマニュアル化されている。専門的に数学を学ぶのでなければ、効率よく知識を伝達していこうという姿勢で、わかりやすく、親しみやすく命名された定理など、例えばはさみうちの定理は“サンドイッチ”など、定義や証明にたいする考え方の違いを感じる。

急速な技術の進歩や工科、科学、ビジネス、経営の多くの問題は、初歩的な微積分、確率の知識を要求しているので、数学を学ばない生徒たちにもあまねく変化率や平均という考えは知っておいて欲しい基本的なことである。

それなのに微積分が本格的に取り上げられていない理由は、アメリカの教師は微積分よりは抽象代数の方が教えやすい、論理的にあいまいな微積分をやりたくないということがあるらしい。

指導方法

容易なものから難しいものへ段階づけられたカリキュラムの序列に沿ってすすませればよいと考えている。教師はしかも教え育てる努力を惜しまず、生徒の自主性を前提としていて、生徒との個人関係を重要視している。

生徒の序列付けにも技術的知識は役に立つが、しかし、技術的知識の突出は脱技能化、再技能化、脱権限化という事態を引き起こし教師の労働がプロレタリア化されていく。つまり教師は生徒のためにどのような教材をどのように提示するかという教育労働の全体性から疎外された労働に従事することになる。

生徒にとっても技術的知識の習得ではもっぱら「何を」ではなく「いかに」が問われ、前もって易から難へ配列されたカリキュラムをできるだけ「速く」「多く」こなしていくように圧力がかかる。

この傾向は一斉授業から個人の進度に応じた自学自習システムの導入の移行によってますます拍車がかかる。後期資本主義社会の再生産を担う主体としての「所有欲の強い個人」

が顕著に現れている。

アメリカ高校数学科目受講変化

シニア・ハイスクール生徒の州別修了者の割合

数学分野別履修者数の比較：1980年のシニアハイスクールコース別修了者の割合の比較、その後の82年、90年の変化の表。

表－6

(%)

1980年度州別数学コース	NY	PA	IL	OH	CA	WA
代数 1						
アカデミック	99	96	97	97	95	96
普　通	83	56	83	71	75	82
職　業	72	57	81	68	69	77
総　合	88	75	87	83	82	85
幾　何						
アカデミック	94	95	91	90	88	92
普　通	64	42	61	50	53	57
職　業	49	37	54	40	41	53
総　合	76	64	69	66	65	66
代数 2						
アカデミック	88	88	76	74	72	79
普　通	56	32	69	29	35	43
職　業	37	29	33	25	29	35
総　合	68	56	50	49	49	51
三角法						
アカデミック	75	58	50	46	44	57
普　通	36	9	14	10	10	16
職　業	17	5	8	8	6	11
総　合	52	30	25	26	23	26
微積分						
アカデミック	24	17	12	18	14	20
普　通	7	1	2	3	2	3
職　業	3	1	4	1	3	1
総　合	15	8	6	9	7	7

表－7

(%)

科目名	1982年	1990年
代数1	65	81
代数2	35	49
微積分	5	9

1980、82、90年の修了者の割合は大きく変化はしていない。顕著なのは代数幾何の基礎科目の80%より多いのに対して、三角関数や微分積分の履修者が少ないことである。微積分の受講が少ない理由のひとつに教員の質の問題とアメリカの教師は論理的にあいまいな微積分はやりたくなく、抽象代数のほうが教えやすいと考えていることがある。

3．テクノロジー

3．1　役割とは

テクノロジーを使用して、データの収集・疑似体験・疑似実験をして、経験から予測し、シミュレーションを通して理論的なモデルを構築することができる。そして生徒、学生自ら考え、判断し、行動することにより創造力を高め、自ら学ぶ意欲を育てるのに大変有効である。つまり形式的になりがちな数学概念を操作的・実験的な方法で具体化して提示することができる。学習意欲を強化する知的活動や探究的活動をさらに促進するために自分で考えたことをテクノロジーを使ってその場で実験してみることができる。

数学が得意でもコンピュータなどのテクノロジーを毛嫌いし戸惑う学生が見受けられ、また一方数学が苦手でもグラフィックの虜になりかなり興味を示すようになる。しかし、実際使用しているうちに相当量の計算やグラフィックがいとも簡単に得られるため、自ら判断することなく結果の鵜呑みをする学生が多く見受けられる。

テクノロジーの活用しやすいソフトや機器等の普及が望まれる。

3．2　アメリカでのテクノロジー使用状況

1998年2月2330校あて発送したアンケートのうち回答のあった600校の調査結果である。(報告のあった教員の総数は12951)

短大、大学での授業中のテクノロジー使用状況は10.3%、そのうちグラフ電卓の使用は48.0%、コンピュータは7.9%である。(表―9の全回答に対する割合)

3．3　日本でのテクノロジー使用状況

大学での微積分の授業（1変数はもとより多変数においても幾何学的理解すると解り易い）でMathematicaとTexを活用した例がある。標準的な学生にとって必ずしも理解し

表－8

(%)

1998年アメリカ	グラフ電卓 (graphing calculators)	CAS (computer algebra system)	データ収集器 (data collection device)
2年生単科大学(278)	93.2	37.1	29.1
4年生単科大学(193)	77.7	31.6	11.9
総合大学(113)	77.0	29.2	19.5
合計 (600内6不明)	85.1	34.0	21.6

表－9

(%)

数学レベル	グラフ電卓 (graphing calculators)	CAS (computer algebra system)	データ収集器 (data collection device)
DEV (development)	24.4	1.6	1.3
ALG (college algebra)	56.7	5.1	4.1
PCALC (pre - calculus)	69.5	8.1	5.8
CALC (calculus)	61.9	18.5	4.0
STAT (statistics)	43.8	6.7	4.8
全回答に対する割合	48.0	7.9	3.5

易いとは言い難い面があった従来の黒板中心から、Mathematica の持つ卓抜なコンピュータグラフィック機能により極限計算や多変数関数を扱っているところがある。しかし、大部分は講義中心、紙と鉛筆による問題演習が主であるが、次第に簡単に見せることが出来る器材、例えばグラフ電卓やパソコンなどができたことと、個別に使用できる環境が整備されてきていること、高校までで今後かなり日常的に使用されてくれば、急速に増えることが予想される。

4．解析学……具体的比較例

4．1　解析

急速な技術の進歩や工科・科学・ビジネス・経営の多くの問題は、初歩的な微積分、確率の知識を要求する。

微分とは読んで字の如く、微小に分けるという意味である。グラフのある点での接線や傾きを求めることである。変化率や平均という考えは知っておいて欲しい基本的なことである。導入方法としては大きく分けて次の2通りがある。

(1)極限の概念の理解を待ってから微積分を論理的に完全な指導を始める。

(2)微積分についての直観的で短い導入を行なっておき、最後に完全な展開を考える。

積分は、複雑な形の土地の面積を調べるためにできた技術で、細かく分けたものを積む、集めるというものである。微分にも積分にも極限の考えが必要である。わずかな期間に正確さの稀薄な話としての微積分を展開することは、数学すべてを正確に定義された概念にまで立ち戻って組立ていこうとしている生徒にとっては、はなはだ不満足なもので、その扱いのあいまいさは害を及ぼす。

4．2　とりあげる理由

歴史的にユークリッド幾何、代数そして解析学へと拡大し、解析学全体の発展が著しいこととある程度基盤となるところが固まっていること、理論物理学への応用(関数方程式、積分方程式、ヒルベルト空間、テンソル解析など）と数学の中で大学初年での基礎科目であること、テクノロジーの使用が可能な分野であり、使うことにより分かりやすくなることによる。

4．3　日本の解析教科書とグラフ電卓使用の解析テキストとの内容比較

①野本久夫・岸正倫共著：解析入門の内容

1．基礎知識……実数、ユークリッド空間、連続関数
2．微分……導関数、高階導関数、不定積分、微分方程式、偏微分、陰関数、
3．積分……定積分、広義積分、重積分、ベキ級数、フーリエ級数
4．ベクトル解析……線積分、グリーンの定理、面積分、ガウスの定理とストークスの定理、ベクトル場と微分式

微積分の理論的取り扱いを理解し、計算技術の学習とその理論的応用を目論んでいる。積分を使う問題として例えば、「周囲の長さが一定の三角形の面積最大なものは正三角形であることを証明せよ。」「$r = a\cos 2\theta \left(-\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4},\ a > 0\right)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。」があげられている。

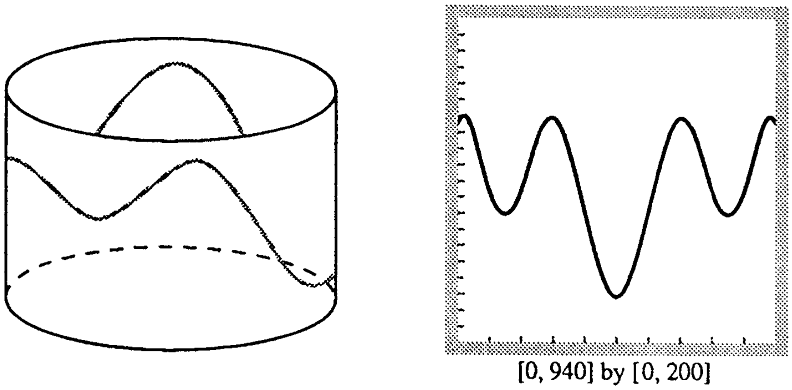
②微積分の計算を主とする Finney・Thomas・Demana・Waits 共著：Calculus A Graphing Approach の内容

1．基礎知識……座標、slope、graph、幾何学的変換、三角関数
2．極限と連続……Sandwich Theorem、Target Values、$\varepsilon\delta$ による定義
3．微分……速度、加速度、陰関数・分数関数の微分、近似
4．微分応用……極大・極小、中間値定理、ニュートン法、経済応用
5．積分……定積分、基本定理、不定積分、置換積分、台形近似・Simpson 法
6．定積分応用……面積、Disks & Washers（回転体)、cylinder、

はじめに直感的でわかり易い短い導入を行ない、具体的な使用例を示し、正確に定義された微積分の基本的な概念をのべている。

積分を使用して長さを求める問題例

EXAMPLE 2 A roller coaster track is modeled by the graph of $y = 100 + 30\sin(0.01x) + 40\cos(0.02x)$ from $x = 0$ to $x = 940$ feet. Think of a roller coaster track on the surface of a circular cylinder and then unwrap the cylinder. See Fig. 6.27. What is the length of the track?



6.27 The roller coaster track of Example 2.

Solution The track length is modeled by the length of the curve $y = 100 + 30\sin(0.01x) + 40\cos(0.02x)$ from 0 to 940 and is given by

$$\int_0^{940} \sqrt{1 + (0.3\cos(0.01x) - 0.8\sin(0.02x)^2}\, dx.$$

This is an easy job for technology.

$$\text{FnInt}\,(\sqrt{1 + (0.3\cos 0.01x - 0.8\sin 0.02x)^2}, x, 0, 940) = 1064.47850.$$

So the length of the track is about 1064 feet.

4．4　グラフ電卓を使用しての解析学

4．4．1　グラフ電卓のグラフ表示

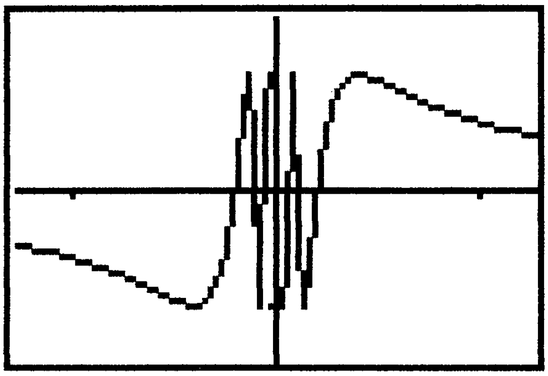
グラフ電卓では4つの方法でグラフ表示することができる：関数、媒介変数、極座標、数列である。するとつぎのことがわかる。

1つのグラフの形も式で表わす方法は1通りではない。

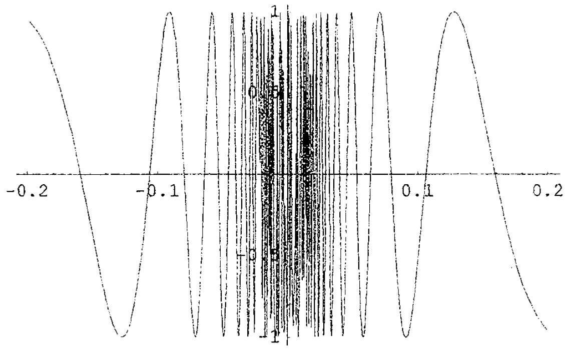
表示されたものが必ずしも正しくはない。

$y = \sin\frac{1}{x}$は一定の間隔でx軸上の点に対応するy座標をとってグラフ表示するとy軸に近づくにつれ振幅の変化は同じであるのにx軸を切る間隔が狭くなるので、見かけ上振幅も変化しているように表示されてしまう。実際には－1と1の間を振動している。

グラフ電卓による $\sin\frac{1}{x}$ のグラフ



Mathematica によるグラフ表示



4．4．2　連続関数の定義と四則演算

連続関数の概念は位相的なもので、計量的なものではない、すなわち、近傍から近傍への写像であること、区間縮小法により連続関数は閉区間において中間値および最大値をとること、連続関数は有界な閉区間を有界な閉区間に移すこと、連続関数は積分可能であること等がわかる。

伝統的な数学では連続関数のみを強調しすぎている。実際の多くは、不連続な変量が関係してくるから不連続な例についても考慮すべきである。

4．4．3　基本グラフを使って四則演算や合成関数を作成する

基本グラフの整関数(分数関数、無理関数)、指数、対数、三角関数の特徴をとらえると、次のことがわかる。

指数関数、対数関数、三角関数を多項式関数で表わす Taylor 展開

多項式関数を三角関数で表わす Fourier 展開

微分方程式と関数との関係：指数関数　$y = y'$　三角関数　$y'' + y = 0$

4．4．4　連続関数ではない関数を連続にする方法

例えば、

$y = \sin\frac{1}{x}$ は $x \neq 0$ で連続である

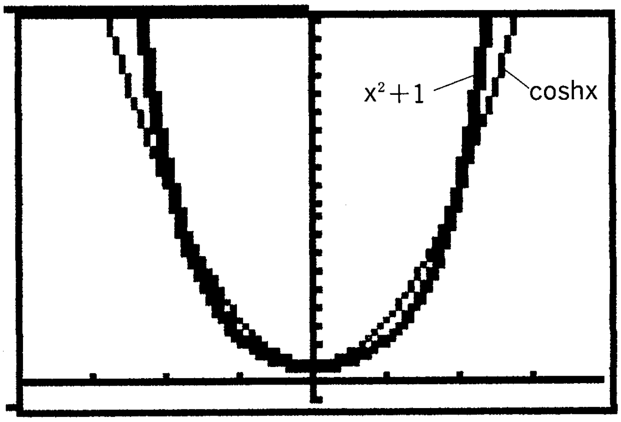
$y = x\sin\frac{1}{x}$ は連続であるが、y' は連続ではない

$y = x^2\sin\frac{1}{x}$ は連続であり、y' も連続である

連続ではない部分を x や x^2 で挾み込んで強制的に滑らかな連続関数にする。

4．4．5　応用

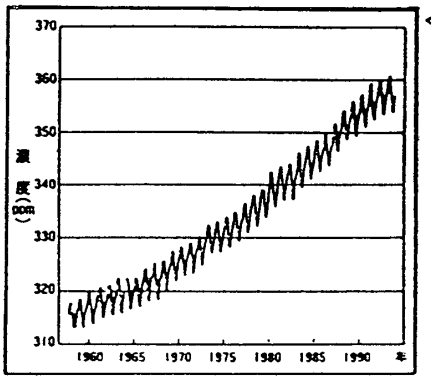
形は同じように見える例えば $y = x^2 + 1$ と $y = \cosh x$ とはどのように区別できるかという問題も、同じ画面に全体を縮小してマクロに見たり、部分的に拡大してミクロに見ることにより、図形的にも理解できる。



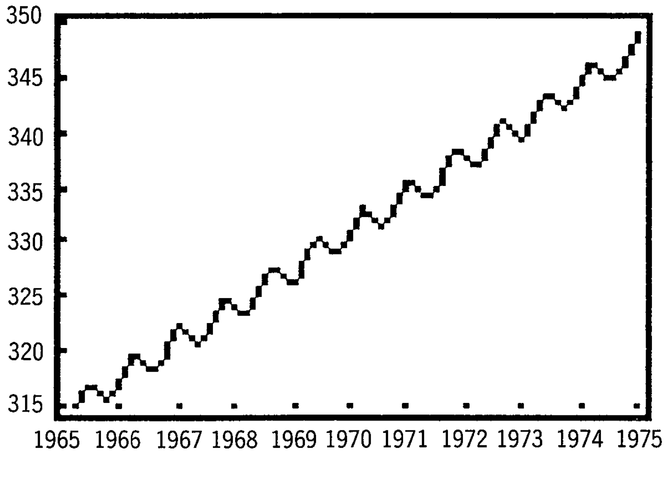
一般のグラフの式を想定する。例えば、CO_2の観測データから式を作成し、式から予測したり、式の性質から、そのグラフの特徴をとらえる。

身近にある関数やグラフを見て、その性質や特徴を読み取れればすぐに応用がきくと考え、構成したものである。

過去30年(1960～1990)のCO_2の増加



$$y=\frac{4}{3}(x-1995)+2.5\sin 2\pi x+315$$



参考文献

1）日本数学教育会編『数学教育の現代化』（培風館）1966
2）瀬沼花子：アメリカの算数・数学教育、『算数・数学における国際理解教育』（エムティ出版）1994
3）国立教育研究所編『数学教育の国際比較ー第２回国際教育調査最終報告ー』（第一法規）1991 216p、特別研究『基礎学力』調査報告書第二次報告書 1993 pp.17-20
4）『アンケート集計結果報告』東京都高等学校数学教育研究会特別委員会 1997
5）『パソコンジャーナル』大阪高等学校数学教育会　第23、24、25号 1997
6）森園子・長崎栄三・瀬沼花子：『算数・数学教育に対する保護者の意識』日本数学教育学会誌、1998、第80巻　第３号
7）『数学と社会的文脈との関係に関する研究ー数学と子どもや社会とのつながり』科学研究費研究成果報告書 1997
8）E.D.Laughbaum: *Mathematics Education's Response to the Availability of a Hand-Held Computer Algebra System* (The 2nd T3 Japan Annual Meeting) 1998
9）Finney/Thomas/Demana/Waits : *Calculus A Graphing Approach* (Addison-Wesley) 1993
10）野本久夫・岸正倫：『解析入門』（サイエンス社）1990

〔文理学部助手（数学）1995～97年度個人研究員〕